

Matematica III

Docenti: Francesca De Marchis e Giulio Galise
CdL in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni,
CdL in Statistica, Economia e Società, CdL in Statistica Gestionale
A.A. 2022/2023

Esercitazione 7

Esercizio 1. Calcolare

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy$$

nei seguenti casi:

(1) $f(x, y) = \frac{x}{1+y}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$

(2) $f(x, y) = ax^2 + by$, $a, b \in \mathbb{R}$, $D = \{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} : x^2 \leq y \leq 1\}$

Esercizio 2. Calcolare

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy$$

nei seguenti casi:

(1) $f(x, y) = y \arcsin x$, D è il quarto di cerchio di centro l'origine e raggio unitario contenuto nel primo quadrante

(2) $f(x, y) = \frac{y}{4x^2 + y^2}$, D è la porzione del piano limitata dalla parabola $y = 1 - x^2$ e dall'asse delle x

(3) $f(x, y) = \ln(1 + x + 2y)$, D è l'insieme delimitato dalla parabola $x = y^2$ e dalle rette $y = 0$ e $x = 1$

(4) $f(x, y) = \cos(y^2)$, D è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$

(5) $f(x, y) = \frac{\sin y}{y}$, D è il quadrilatero di vertici $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, (π, π) , $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 2\pi)$

Esercizio 3. Esprimere i seguenti integrali doppi invertendo l'ordine di integrazione

(1) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[4]{y}} f(x, y) \, dx$

(2) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy$

$$(3) \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2} f(x, y) dy$$

Esercizio 4. Calcolare il volume del cilindroide

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \left[\frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi} \right], y \in \left[0, \frac{1}{x} \right], 0 \leq z \leq \frac{\cos y}{x^2} \right\}$$

Esercizio 5. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D |x - y| dx dy$$

essendo D il dominio limitato dalla retta di equazione $y = 2x - 1$ e dalla parabola di equazione $y = 2 - x^2$.

Esercizio 6. Determinare l'area del dominio limitato dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dove $a, b > 0$.

Esercizio 7. Siano $R = [0, 1] \times [0, 1]$ ed $f : R \mapsto \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Usando la definizione stabilire se f è integrabile su R e, in caso positivo, calcolare

$$\iint_R f(x, y) dx dy.$$

La frontiera ∂R di R è misurabile? Quanto vale $\text{mis}(\partial R)$?